

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC**  
**CLASA a 10-a**  
**București, 13 februarie 2026**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

**Problema 1** (autor Mihaela Berindeanu, G.M. 6-7-8/2025)

Determinați funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  cu proprietatea că  $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  
pentru orice  $x, y \in (0, \infty)$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $x = y = 1$ obținem $f(1)^2 - f(1) = 2$ și cum $f(1) > 0$ , rezultă $f(1) = 2$ .	10p
Pentru $x \in (0, \infty)$ și $y = 1$ avem $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$ , deci $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , funcție care verifică proprietatea din enunț.	12,5p

**Problema 2** (autor Flavian Georgescu)

Determinați perechile  $(x, y)$  de numere reale cu  $x, y \in [20, 26]$  astfel încât  
 $\max \left\{ (46x - 520)^{\log_y 45}, (46y - 520)^{\log_x 45} \right\} \leq 2025$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
$(x, y)$ soluție $\Rightarrow (y, x)$ soluție, deci putem presupune $x \leq y$ . $(y - 20)(y - 26) \leq 0 \Rightarrow y^2 \leq 46y - 520 \Rightarrow y^{2\log_x 45} \leq (46y - 520)^{\log_x 45} \leq 2025$ (*)	8p
Obținem $45^{2\log_x y} \leq 45^2$ , deci $\log_x y \leq 1$ , de unde $y \leq x$ , în consecință, $x = y$ .	6,5p
Cum inegalitățile din (*) devin egalități, obținem $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025$ Avem: $(46x - 520)^{\log_x 45} = 2025 \Leftrightarrow 45^{\log_x (46x - 520)} = 45^2 \Leftrightarrow \log_x (46x - 520) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 46x - 520 \Leftrightarrow x \in \{20, 26\}$ . Obținem perechile $(20, 20)$ și $(26, 26)$ , care verifică.	8p

**Problema 3** (autor Alina Paraschiv )

Fie  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere complexe nenule și  $a \geq 2$  un număr real cu proprietatea că  $\log_a(|z_n|)$  este număr natural, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Fie  $P$  mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui  $\mathbb{N}$  și funcțiile  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g: P \rightarrow \mathbb{C}$  cu  $f(n) = \log_a(|z_n|)$  și  $g(X) = \sum_{i \in X} z_i$ .

Arătați că, dacă  $f$  e injectivă, atunci  $g$  e injectivă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $X, Y \in P$ cu $g(X) = g(Y)$ . Presupunem $X \neq Y$ , deci $X \Delta Y \neq \emptyset$ , unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ . Fie $k = f(j) = \max\{f(i), i \in X \Delta Y\}$ . Din injectivitatea lui $f$ , $j$ e unic și presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $j \in X$ . După eventuala reducere a termenilor cu indicii în $X \cap Y$ , egalitatea $g(X) = g(Y)$ devine $z_j = \sum_{i \in Y \setminus X} z_i - \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i$ (*) ( $\sum_{i \in T} z_i = 0$ , dacă $T = \emptyset$ )	7p
Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} = \emptyset$ , atunci $z_j = 0$ , fals. Dacă $(X \Delta Y) \setminus \{j\} \neq \emptyset$ , atunci $k \geq 1$ , și din (*) obținem $ z_j  \leq \left  \sum_{i \in Y \setminus X} z_i \right  + \left  \sum_{i \in (X \setminus Y) \setminus \{j\}} z_i \right  \leq \sum_{i \in (X \Delta Y) \setminus \{j\}}  z_i $	7p
Din injectivitatea lui $f$ și $a \geq 2$ rezultă $a^k \leq 1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \leq a^k - 1$ , fals, deci $X = Y$ și $g$ e injectivă.	8,5p

**Problema 4** (autor Flavian Georgescu)

Determinați numerele complexe  $a, b, c, d$  care au, simultan, proprietățile:

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 1, \quad a + b + c + d = 2\sqrt{3} \quad \text{și} \quad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum cele patru numere au toate modulul egal cu 1 și $a^3 + b^3 = (-c)^3 + (-d)^3$ , rezultă ca $a^3, b^3, (-c)^3$ și $(-d)^3$ sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi (eventual degenerat) înscris în cercul unitate.	5p
După o eventuală redenumire, rezultă $a^3 = -b^3$ și $c^3 = -d^3$ . Dacă $a = -b$ obținem $2\sqrt{3} =  c + d  \leq  c  +  d  = 2$ , fals, deci $a \neq -b$ și, analog, $c \neq -d$ .	5p

După o eventuală redenumire, rezultă $a = b\varepsilon$ și $c = d\varepsilon$ , unde $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ . Atunci $2\sqrt{3} = b\varepsilon + b + d\varepsilon + d = (1+\varepsilon)(b+d)$ , deci $b+d = \sqrt{3}-i$	<b>6p</b>
Cum $ b+d  =  \sqrt{3}-i  = 2 =  b + d $ și $ b = d =1$ , obținem $b = d = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ , în consecință, $a = c = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ .	<b>6p</b>
Deci două dintre numere sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ și două sunt egale cu $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ .	<b>0,5p</b>